LINKOSA

OPTIMALIZAČNÍ MODUL PRO PROSTŘEDÍ EXCEL

Návod k obsluze české verze

© Doc. Ing. Tomáš Šubrt, Ph.D., prof. RNDr. Helena Brožová, CSc.

Programová realizace

Modul LINKOSA.XLA může být uživateli přístupný jako integrální součást prostředí Excel, neboť je přeložen do tzv. „Add In“ tvaru, záleží tedy pouze na uživateli, chce-li si jej permanentně do svého tabulkového procesoru vložit, či chce-li s ním pracovat jako se samostatným programem (samozřejmě v rámci prostředí). Za programovací jazyk byl autory zvolen objektově orientovaný Visual Basic s využitím knihovny objektů Excelu. Celý program - modul se důsledně vyhýbá práci s „worksheetovými funkcemi“, takže všechny operace s proměnnými probíhají bez komunikace s aktuálním listem. Při programové koncepci se autoři snažili co nejvíce přiblížit běžně užívaným konvencím v zápisech a zadávání úloh lineárního programování a jejich parametrů (vstupů) uživatelům orientovaným spíše na praktické aplikace lineárního programování než na práci s PC. Díky druhému zohlednění je Linkosa zcela nezávislý na formálním zápisu úlohy na listu tabulkového procesoru.

Matematická podstata použitého algoritmu

Modul Linkosa slouží k řešení obecných lineárních modelů s oboustranně omezenými proměnnými a různými typy lineárních omezujících podmínek. Je využit upravený revidovaný simplexový algoritmus, který pracuje se vstupními údaji v matici ***A***, v níž jsou koeficienty v omezujících podmínkách, vektorech ***b*** a ***c*** s cenami v účelové funkci a hodnotami pravých stran omezení, vektorech ***d*** a ***h*** obsahujících dolní a horní meze proměnných a vektoru ***om*** popisujícím typ podmínek.

Lineární optimalizační model předpokládáme ve tvaru

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{Ax} \leq=\geq \boldsymbol{b} \\ &x_j \geq d_j \\ &x_j \leq h_j \\ &\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{x} \rightarrow \max/\min \end{aligned}$$

kde ***A*** je matice koeficientů lineárních podmínek,

b_i je hodnota omezení - pravých stran,

d_j je dolní mez hodnoty proměnné,

h_j je dolní mez hodnoty proměnné,

c_j je sazba proměnné v účelové funkci.

Pokud některá proměnná nemá dolní mez, předpokládáme $x_j \geq 0$, pokud nemá horní mez předpokládáme $x_j \leq 10^{70}$.

Prvním krokem algoritmu je úprava modelu dosazením dolních mezí proměnných. Poté jsou upraveny jednotlivé podmínky tak, aby hodnoty všech pravých stran byly nezáporné.

Vlastní výpočet začíná určením výchozího bázického řešení s využitím doplňkových a pomocných proměnných a rozšířením modelu o pomocnou účelovou funkci

$$\sum x_{iP} \rightarrow \min$$

kde x_{iP} jsou pomocné proměnné.

Tato funkce je dále upravena dosazením za pomocné proměnné z omezujících podmínek

$$x_{iP} = \sum a_{ij} x_j - b_i$$

U doplňkových a pomocných proměnných se předpokládá pouze nezápornost jejich hodnot.

Podle výchozího bázického řešení je určen pracovní vektor ***typ***, který obsahuje informace o proměnných. Hodnoty jeho složek jsou 0, je-li proměnná nebázická s nulovou hodnotou, -1, je-li proměnná nebázická s hodnotou své horní meze, nebo index řádku, je-li proměnná bázická a patří-li tomuto řádku.

Dále jsou využity pomocná matice $\boldsymbol{B}^{-1}$ obsahující inversní matici báze a vektory $\boldsymbol{\alpha}$ a $\boldsymbol{\beta}$ obsahující aktuální hodnoty složek transformovaných vektorů $\boldsymbol{a_j}$ a $\boldsymbol{b}$ v modelu. Sloupce v matici $\boldsymbol{B}^{-1}$ jsou zároveň sloupci koeficientů výchozích bázických proměnných, tedy doplňkových typu rezerva a pomocných, sloupce doplňkových proměnných typu překročení se liší pouze násobkem -1.

Algoritmus výpočtu má dvě fáze, v první je nalezeno výchozí bázické řešení modelu s využitím pomocné účelové funkce minimalizující součet hodnot pomocných proměnných. Pokud v optimálním řešení této funkce jsou vyřazeny pomocné proměnné z báze, pokračuje výpočet hledáním optimálního řešení modelu s vlastní účelovou funkcí. Výpočet končí, je-li nalezeno optimální řešení, nebo nelze-li toto řešení nalézt, protože účelová funkce je na množině přípustných řešení neomezená. Po výpočtu je k dispozici i matice transformovaných vektorů, takže je možno provádět další požadované výpočty a experimenty s optimálním řešením modelu.

Test optimality a test přípustnosti probíhají podle klasických pravidel s přesností na jednu miliontinu. Pro test přípustnosti jsou vždy určeny transformované vektory příslušné proměnné a pravé strany.

Obecný krok algoritmu tedy vychází z testu optimality, pro který jsou vypočítávány hodnoty

$$z_j - c_j = (\boldsymbol{B}^{-1})_{n1} * \boldsymbol{a_j}$$

kde $\boldsymbol{B}^{-1}$ je aktuální inversní matice báze a

α_j je vektor testované strukturní proměnné,

$n1$ je poslední řádek inversní matice báze.

Pro doplňkové proměnné typu rezerva nebo pomocné proměnné i-té omezující podmínky jsou kriteriální hodnoty přímo v matici $\boldsymbol{B}^{-1}$, tedy

$$z_i - c_i = (\boldsymbol{B}^{-1})_{n1}$$

pro doplňkové proměnné typu překročení je třeba brát v úvahu sazbu pomocných proměnných, a proto

$$z_i - c_i = (-\boldsymbol{B}^{-1})_{n1} + 1$$

v první fázi výpočtu a

$$z_i - c_i = (-\boldsymbol{B}^{-1})_{n1}$$

v druhé fázi.

Tyto hodnoty jsou uvažovány v případě proměnných na dolní mezi, pro proměnné na horní mezi jsou ještě násobeny koeficientem -1.

Po výběru výhodné proměnné pro zařazení do báze je třeba určit, zda dojde ke změně aktuální báze a přechodu některých proměnných z dolních na horní meze či obráceně. Vzhledem k rozšíření algoritmu o omezení proměnných výpočet pokračuje podle stavu aktuálního řešení a výsledku testu přípustnosti jednou ze šesti možností:

- vybraná proměnná byla na dolní mezi a nahradí proměnnou, jejíž hodnota bude na dolní mezi
- vybraná proměnná byla na dolní mezi a nahradí proměnnou, jejíž hodnota bude na horní mezi
- vybraná proměnná byla na dolní mezi a bude mít hodnotu rovnu své horní mezi
- vybraná proměnná byla na horní mezi a nahradí proměnnou, jejíž hodnota bude na dolní mezi
- vybraná proměnná byla na horní mezi a nahradí proměnnou, jejíž hodnota bude na horní mezi
- vybraná proměnná byla na horní mezi a bude mít hodnotu rovnu své dolní mezi

Pro test přípustnosti je potřeba znát hodnoty transformovaných vektorů vybrané proměnné a pravých stran. Pro vektor pravých stran platí

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{B}^{-1} * \boldsymbol{b}\,.$$

Aktuální vektor vybrané strukturní proměnné vypočítáme podle vztahu

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{B}^{-1} * \boldsymbol{a}_j\,.$$

Pro doplňkové proměnné typu rezerva a pro pomocné proměnné v i-té podmínce jde o i-tý sloupcový vektor z inversní matice báze, v případě doplňkové proměnné typu překročení v i-té podmínce se jedná o i-tý vektor inversní matice báze vynásobený koeficientem -1.

Eliminační krok je realizován přechodem k nové inversní matici báze. Na rozdíl od klasické revidované metody zde není využita metoda reinverse, ale v každém kroku je známa aktuální inversní matice $\boldsymbol{B}^{-1}$. Po určení řídícího prvku je proveden jeden eliminační krok transformace inversní matice báze. Případně jsou upraveny hodnoty pravých stran vzhledem ke změně hodnot proměnných s hodnotami na dolní nebo horní mezi.

Práce s modulem

Otevření modulu LINKOSA

Modul LINKOSA může být uživateli přístupný jako integrální součást prostředí Excel, neboť je přeložen do tzv. „Add In“ tvaru, záleží tedy pouze na uživateli, chce-li si jej permanentně do svého tabulkového procesoru vložit, či chce-li s ním pracovat jako se samostatným programem (samozřejmě v rámci prostředí).

Buď bude tento modul otevřen jako soubor programu MS Excel a následně spuštěn procedurou „**HLAVNILIN**“, nebo instalován jako doplněk příkazem ***SOUBOR – Možnosti – Doplňky*** a standardně spuštěn z nabídky Excelu**.**

Zápis modelu do listu MS EXCEL

Současná verze umožňuje řešit problémy o 250 omezujících podmínkách a 250 strukturních proměnných. Linkosa podporuje zadávání modelu v následujícím tvaru

$$\boldsymbol{Ax} \leq = \geq \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{d}$$
$$\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{h}$$
$$\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{x} \rightarrow \max / \min$$

V grafické podobě, všeobecně známé a vhodné pro list tabulkového procesoru mohou být tyto parametry v aktuálním listu zobrazeny jako na následujícím obrázku.

Prvním krokem při práci s každým modulem je příprava matematického modelu na list tabulkového procesoru. Každý koeficient, název, typ omezení, kritéria, či smysl optimalizace musí ležet v samostatné buňce. Nulové prvky není třeba zadávat. Z důvodu přehlednosti výsledků je vhodné, nikoli však nutné, aby v jednom sešitu (souboru *.XLS) byl definován vždy jen jeden model. Doporučené rozvržení modelu na listu Excelu je na obrázku 1.

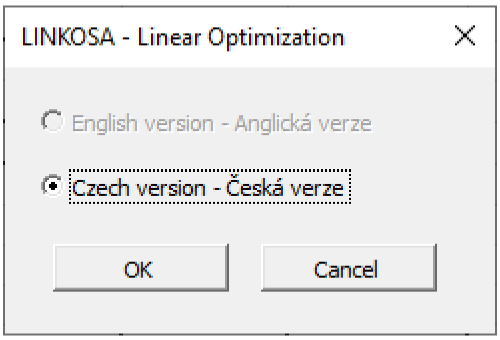
Ještě jednou je na tomto místě třeba zdůraznit, že se jedná pouze o tvar doporučený, neboť program Linkosa je nezávislý na formálním tvaru modelu v aktuálním listu.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2			Model malé soukromé farmy								
3											
4			pšenice	ječmen	brambory	pastviny	dojnice	mléko			
5											
6		dolní mez	8	0	10	15	0	0			
7		horní mez	30	30	30	15	30				
8									typ omezení	pravá starna	
9		orná půda	1	1	1	0	0	0	<	30	
10		výměra pastvin	0	0	0	1	0	0	<	15	
11		bilance krmiv	0	0	0	-29	25,55	0	<	0	
12		prodej mléka	0	0	0	0	-4	1	<	0	
13		prodej obilí	5,5	5,8	0	0	0	0	>	0	
14		prodej brambor	0	0	20	0	0	0	>	0	
15											
16		ZISK	6,5	7,8	5,6	-5,6	-10,4	5,8			
17											

Obr. 1: Formální struktura lineárního optimalizačního modelu na aktuálním listu

Spuštění a volba jazyka

Po spuštění programového modulu z menu ***NÁSTROJE– Linear Optimization*** je nutné zvolit jazyk pro komunikaci s uživatelem – viz následující obrázek.



Obr.2: Výběr jazykové mutace modulu Linkosa

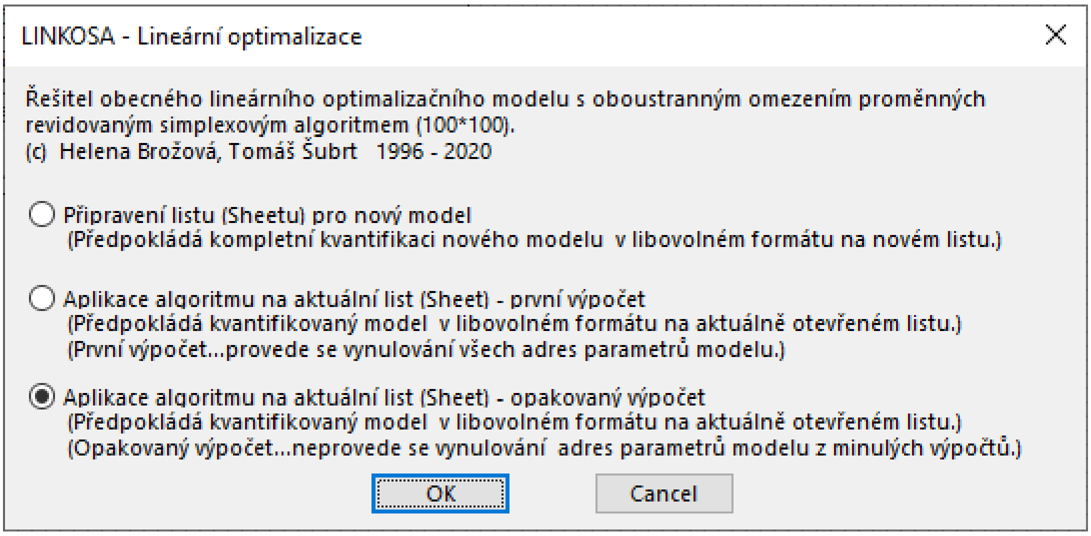
Výběr režimu práce

Po zvolení jazyka komunikace se uživatel rozhoduje, zda chce zadávat zcela nový, zatím neřešený model, nebo zda chce znovu počítat model již příslušným modulem jednou řešený, jen mírně změněný (např. co do hodnoty koeficientů). Popis rozhodovacího dialogu třetího kroku vidíme na obrázku 3. Modul Linkosa umožňuje dva režimy práce:

1. Aplikaci algoritmu na aktuální list - první výpočet
2. Aplikaci algoritmu na aktuální list - opakovaný výpočet

Ve první větvi Linkosa vyžaduje zadání názvu modelu a adres všech jeho parametrů. Všechny dříve definované adresy se vynulují.

Ve druhém režimu práce Linkosa předpokládá, že adresy parametrů modelu se nezměnily, tedy že je prováděn opakovaný výpočet téhož modelu pouze s kvantitativními změnami v parametrech (např. změny v hodnotách vektoru pravých stran, ve smyslech omezení nebo v typu optimalizace). I v tomto režimu je však možné měnit adresy uložení parametrů, pouze staré adresy musí být ručně uživatelem vymazány.



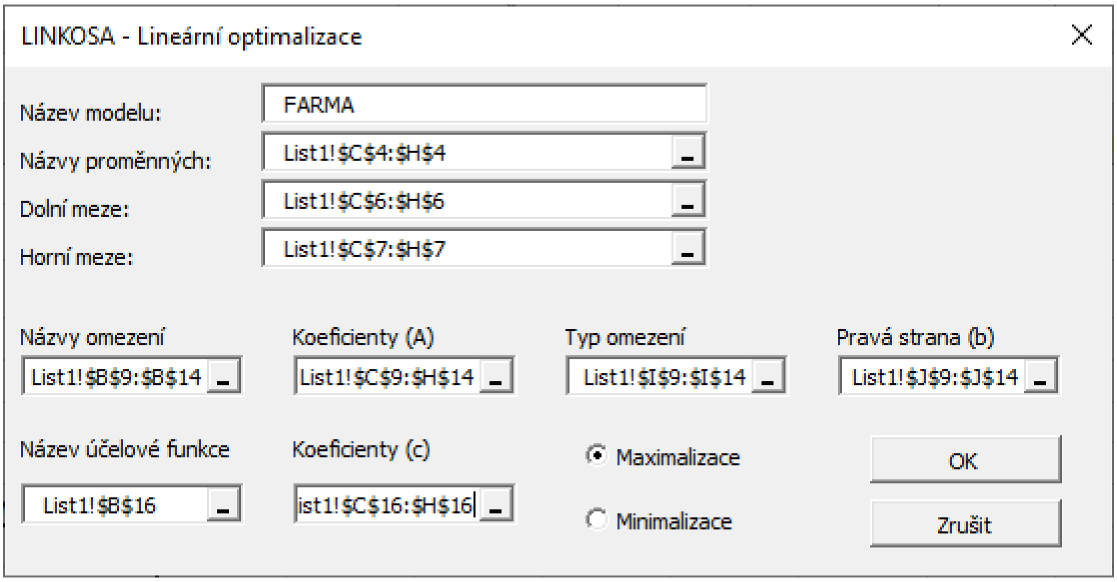
Obr. 3: Výběr režimu práce

Definice formální struktury modelu

Všechny parametry modelu s výjimkou jeho názvu jsou popsány svými fyzickými adresami (ve tvaru A1) na aktuálním listu. Adresy se definují přímým výběrem odpovídajících oblastí (polí) na listu pomocí myši nebo příslušných funkčních kláves dle konvencí prostředí Excel.

Rozměr modelu - počet omezení a počet proměnných - je odvozen od rozměrů oblasti, v níž je definována matice koeficientů omezujících podmínek - tedy matice ***A***. Oblasti matice ***A***, vektoru smyslů omezení, vektorů ***b*** a ***c*** musí být definovány. Jsou-li kdekoli ve vybrané oblasti prázdné buňky, předpokládá se hodnota daného parametru nulová. Není-li zadán smysl omezení, předpokládá se, že toto omezení není uvažováno. Oblasti názvů proměnných, omezení a účelové funkce nemusí být definovány, jejich nezadáním je však prakticky znemožněn smysluplný rozbor výsledků řešení. Nejsou-li definovány oblasti vektorů omezení proměnných (***d*** a ***h***), hledí se na všechny proměnné pouze jako na nezáporné. Analogicky jsou-li oblasti vektorů omezení proměnných definovány a příslušná složka d_j resp. h_j odpovídá prázdné buňce, hledí se na ně jako na $d_j = 0$ resp. $h_j = 10^{70}$.

Při zadávání vektoru omezení do aktuálního listu je třeba jednotlivé typy omezení zadávat v některém a následujících tvarů "<","<=" resp. ">", ">=" resp. "=".



Obr. 4: Definice formální struktury modelu

Výpočet modelu a rozbor výsledků

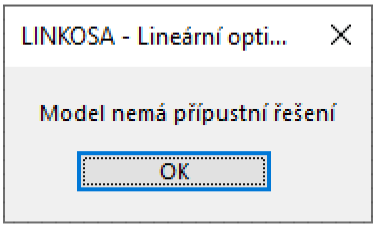
Po zadání adres všech parametrů modelu a výběru typu optimalizace (maximalizace nebo minimalizace) proběhne vlastní výpočet bez jakýchkoli mezivýstupů resp. mezivýsledků.

Nejprve je testována správnost zadání modelu, např. je porovnáván počet proměnných s počtem sloupců matice ***A***, počtem prvků vektorů ***c***, ***d*** a ***h***, počet omezení s počtem řádků matice ***A***, počtem prvků vektoru ***b*** a typů omezení, ale také jsou porovnávány velikosti dolních a horních mezí proměnných. Chyby jsou uživateli oznámeny.

Je-li zadání modelu formálně správné, proběhne výpočet. Ve shodě s principy řešení úlohy lineárního programování nastává jedna z následujících situací.

1. Model nemá optimální řešení - účelová funkce je neomezená.
2. Model nemá přípustné řešení.
3. Optimální řešení bylo nalezeno.

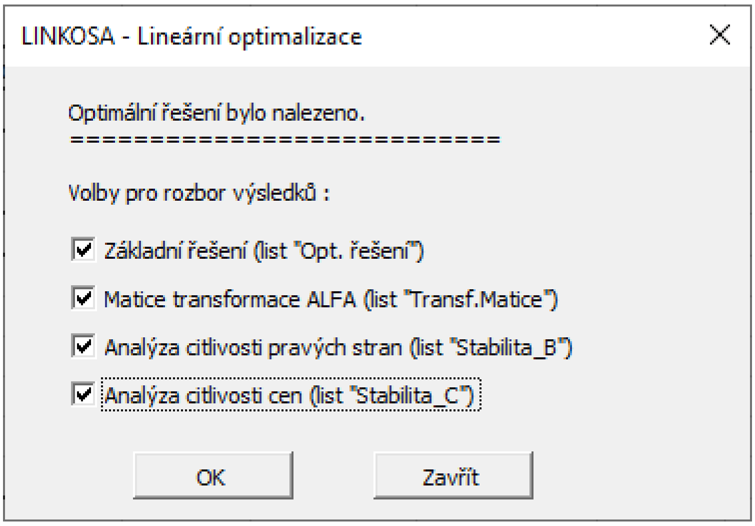
Situace 1 a 2 jsou uživateli oznámeny odpovídajícím varovným dialogy.



Obr. 5: Výpočet modelu skončil neúspěšně

V situaci 3 dojde k úspěšnému vyřešení modelu. Linkosa nabízí uživateli následující výsledné zprávy:

a) Výpis základního řešení modelu.
b) Výpis matice transformace (ALFA) optimální báze.
c) Výpis výsledků analýzy citlivosti pro hodnoty pravých stran.
d) Výpis výsledků analýzy citlivosti pro hodnoty cen.



Obr. 6: Optimální řešení bylo nalezeno

V případě a) dojde k vytvoření nového listu s názvem "Opt.Řešení N", kde N je pořadí výpočtu příslušného modelu modulem Linkosa a jsou v něm v tabulkové formě vypsány podle pořadí a názvů hodnoty všech strukturních proměnných a jejich statuty (bázická / dolní mez / horní mez) jakož i hodnoty levých stran omezujících podmínek s hodnotami příslušejících rezerv (+) či překročení (-).

V případě b) bude vytvořen list s názvem "Matice ALFA N" s analogickým významem hodnoty N. Tento list zobrazuje informace pro rozbor optimálního řešení tj. :

- hodnoty bázických proměnných, strukturní proměnné jsou charakterizovány svými názvy, doplňkové písmenem "R" (jako rezerva) a názvem odpovídajícího omezení,
- hodnoty změnových vektorů $\boldsymbol{\alpha_j}$ jako součinů inverzní matice optimální báze $\boldsymbol{B^{-1}}$ s příslušnými vektory koeficientů nebázických proměnných $\boldsymbol{a_j}$, uvedeny jsou všechny strukturní a doplňkové proměnné a navíc hypotetické doplňkové proměnné typu rezerva, které by patřily omezujícím podmínkám rovnicového tvaru,
- duální ceny, umožňující analýzu perspektivity jednotlivých nebázických proměnných

(*V případě proměnných na horní mezi jsou hodnoty duálních cen násobeny –1 a v případě hypotetických doplňkových proměnných mohou signalizovat hypotetickou neoptimalitu řešení, splnění rovnice*).

V případě c) dojde k vytvoření nového listu s názvem "Stabilita prav. stran N", číslo N vyjadřuje pořadí výpočtu příslušné analýzy citlivosti a jsou v něm v tabulkové formě vypsány podle pořadí a názvů hodnoty všech pravých stran a dolní a horní meze jejich možných hodnot. *Pokud je tato mez ±nekonečno, není tato hodnota uvedena a příslušné pole tabulky je prázdné*.

V případě d) dojde k vytvoření nového listu s názvem "Stabilita cen N", číslo N vyjadřuje pořadí výpočtu příslušné analýzy citlivosti a jsou v něm v tabulkové formě vypsány podle pořadí a názvů hodnoty všech cen – koeficientů v účelové funkci a dolní a horní meze jejich možných hodnot.

Pokud je tato mez ±nekonečno, není tato hodnota uvedena a příslušné pole tabulky je prázdné. V případě hypotetických doplňkových proměnných typu rezerva nemusí interval stability obsahovat hodnotu 0, neboť, jak bylo řečeno, tato proměnná může způsobovat hypotetickou neoptimalitu řešení.

Optimální řešení modelu FARMA

Max. hodnota účelové funkce ZISK

335,525636

Strukturní proměnné

Název	Hodnota	Typ
pšenice	8	Dolní mez
ječmen	12	Bázická
brambory	10	Dolní mez
pastviny	15	Horní mez
dojnice	17,02544	Bázická
mléko	68,10176	Bázická

Omezení

Název	Hodnota	Rezerva
orná půda	30	0
výměra pastvin	15	0
bilance krmiv	0	0
prodej mléka	0	0
prodej obilí	0	113,6
prodej brambor	0	200

Obr. 7: List se základním optimálním řešením

Optimální řešení modelu FARMA

Matice transformačních vektorů ALFA(J)

Bazické proměnné	Hodnota	pšenice	brambory	pastviny	R-orná pů	R-bilance	R-prodej mléka		Dolní mez	Horní mez
ječmen	12	1	1	0	1	0	0			30
R-výměra pastvin	0	0	0	1	0	0	0			
dojnice	17,02544	0	0	-1,13503	0	0,039139	0			30
mléko	68,10176	0	0	-4,54012	0	0,156556	1			
R-prodej obilí	113,6	0,3	5,8	0	5,8	0	0			
R-prodej brambor	200	0	-20	0	0	0	0			
ZISK	335,5256	1,3	2,2	-8,92838	7,8	0,500978	5,8			
Dolní mez		8	10	15						
Horní mez		30	30	15						

Obr. 8: List se změnovými vektory optimální báze

Optimální řešení modelu FARMA

Analýza citlivosti pravých stran

Interval stability

Název	Hodnota	Dolní mez	Horní mez
orná půda	30	18	
výměra pastvin	15	15	
bilance krmiv	0	-435	
prodej mléka	0	-68,10176125	
prodej obilí	0	-113,6	
prodej brambor	0	-200	

Obr. 9: List s intervaly stability pravých stran

Optimální řešení modelu FARMA

Analýza citlivosti cenových koeficientů

Interval stability

Název	Hodnota	Dolní mez	Horní mez
Cena pšenice	6,5		7,8
Cena ječmen	7,8	6,5	
Cena brambory	5,6		7,8
Cena pastviny	-5,6		3,328376
Cena dojnice	-10,4	-23,2	-2,53379
Cena mléko	5,8	2,6	7,766552
Cena R-orná půda	0		7,8
Cena R-výměra pastvin	0	-8,92838	
Cena R-bilance krmiv	0		0,500978
Cena R-prodej mléka	0		5,8
Cena R-prodej obilí	0	-0,37931	
Cena R-prodej brambor	0		0,11

Obr. 10: List s intervaly stability cen